绝密★启用前

考试号

# 2019年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

# 线性代数(经管类)

（课程代码 04184）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，$A^T$表示矩阵$A$的转置矩阵，$A^*$表示矩阵$A$的伴随矩阵，$E$是单位矩阵，$|A|$表示方阵$A$的行列式，$r(A)$表示矩阵$A$的秩.

## 第一部分 选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

A. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix}$

C. $3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

D. $6\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{AP}=$

A. $\begin{pmatrix}2a_1&2a_2&2a_3\\3b_1&3b_2&3b_3\\4c_1&4c_2&4c_3\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2a_1&a_2&a_3\\b_1&3b_2&b_3\\c_1&c_2&4c_3\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}2a_1&3a_2&4a_3\\2b_1&3b_2&4b_3\\2c_1&3c_2&4c_3\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}a_1&a_2&2a_3\\b_1&3b_2&b_3\\4c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$

3. 设向量组 $\alpha_1=(3,-1,a,1)$，$\alpha_2=(-6,2,4,b)$ 线性相关，则必有

A. $a=-2,b=-2$　　B. $a=-2,b=2$

C. $a=2,b=-2$　　D. $a=2,b=2$

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\x&y\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1与2，则数 $x,y$ 的取值分别为

A. $x=-2,y=0$　　B. $x=0,y=-2$

C. $x=2,y=0$　　D. $x=0,y=2$

5. 下列矩阵中，与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ 合同的是

A. $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

## 第二部分　非选择题

**二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。**

6．设某 3 阶行列式第 1 列元素分别为$1,-2,3$，对应的代数余子式为$3,2,-2$，则该行列式的值为_________.

7．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$，则$A^*=$_________.

8．设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$_________.

9．设$A$为3阶矩阵，且$|A|=2$，则$|2A^{-1}|=$_________.

10．设向量$\beta=(2,1,4)^T$可以由向量组$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(-2,-3,a)^T$线性表示，则数$a=$_________.

11．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是非齐次线性方程组$Ax=b$的 3 个解，若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$也是$Ax=b$的解，则数$k_1,k_2,k_3$满足关系式_________.

12．若齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+kx_2+x_3=0\\2x_1+x_2+x_3=0\\kx_2+x_3=0\end{cases}$只有零解，则数$k$应满足的条件是_________.

13．设3阶矩阵$A$的特征值为$1,-2,3$，则$|A^2+E|=$_________.

14．设3阶矩阵$A$与$B$相似，$A$的特征值为$1,-2,3$，则$|AB|=$_________.

15．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$的秩为_________.

**三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。**

16．计算行列式$\begin{vmatrix}a&b&c\\a&a+b&a+b+c\\a&2a+b&3a+2b+c\end{vmatrix}$的值.

17. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 5\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求

（1）矩阵$X$，使得$2X+3A=4B$；

（2）$AB^{\mathrm{T}}$.

18. 设矩阵$A$和$B$满足关系式$AB=A+2B$，其中$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵$B$.

19. 求向量组$\alpha_1=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,3,-1,-3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,-2,8,8)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(2,3,8,9)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 求线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ \quad x_2-x_3+x_4=-3\\ x_1 \quad +x_3-2x_4=-2\end{cases}$的通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$相似，

（1）确定数$x$与$y$的值；

（2）求可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=B$.

22. 求正交变换$x=Qy$，将二次型$f=2x_1^2+6x_2^2+2x_3^2+8x_1x_3$化为标准形.

## 四、证明题：本题7分。

23. 设$\alpha_1,\alpha_2$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：$\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+\alpha_2$也是$Ax=0$的一个基础解系.

绝密★启用前

2019年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

# 线性代数（经管类）试题答案及评分参考

（课程代码 04184）

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。

1. A　2. C　3. A　4. D　5. B

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6. $-7$

7. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. 4

10. 0

11. $k_1+k_2+k_3=1$

12. $k\neq 1$

13. 100

14. 36

15. 3

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16. 解 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & a+b \\ 0 & a & 2a+b \end{vmatrix}$ ……5分

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$ ……9分

17. 解 （1） $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(4\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 7/2 & 8 & 7 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ……5分

（2） $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 37 & 1 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}$ ……9分

18．解　将原式化为$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$可逆，且

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$ ……5 分

故$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$ ……9 分

19．解　由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\2&3&-2&3\\1&-1&8&8\\4&-3&8&9\end{pmatrix}$ ……2 分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&-1&7&6\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……5 分

因此向量组的秩为 3，一个极大无关组是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ ……9 分

（答案不惟一）

20．解　对非齐次线性方程组的增广矩阵做初等行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&0&1&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&2&-2&2&-6\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-2&-2\\0&1&-1&1&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$ ……5 分

得同解方程组$\begin{cases}x_1=-x_3+2x_4-2\\x_2=x_3-x_4-3\end{cases}$.

由此得到非齐次线性方程组的特解$\boldsymbol{\eta}^*=(-2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$，

导出组的一个基础解系为$\xi_1=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

从而，线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\boldsymbol{\eta}^*$，其中$k_1,k_2$是任意常数.

……9 分

21. 解　(1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 且 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$，

所以 $-x=2y$ 且 $x=2+1+y$，得到 $x=2$，$y=-1$ ……5 分

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2,1,-1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$

当 $\lambda_2=1$ 时，方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$

当 $\lambda_3=-1$ 时，方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_3=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$

令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，由于 $\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆

且满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ ……9 分

22. 解　二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{pmatrix}$，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-4\\0&\lambda-6&0\\-4&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=6$ ……4 分

当 $\lambda_1=-2$ 时，方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=6$ 时，方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为

$\xi_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，已正交，

单位化得 $\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$. ……7 分

令 $\boldsymbol{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，

作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，得标准形 ……9 分

$$f=-2y_1^2+6y_2^2+6y_3^2$$

四、证明题：本题 7 分。

23．证 由 $A\alpha_1=\mathbf{0}$， $A\alpha_2=\mathbf{0}$， 可得 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\mathbf{0}$， $A(3\alpha_1+\alpha_2)=\mathbf{0}$，

即 $\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2$ 也是方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的解. ……4 分

设有数 $k_1,k_2$， 使得 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_1+\alpha_2)=\mathbf{0}$，

整理得 $(k_1+3k_2)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2=\mathbf{0}$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，所以有 $\begin{cases} k_1+3k_2=0 \\ k_1+k_2=0 \end{cases}$，解得 $k_1=k_2=0$.

从而 $\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2$ 线性无关，

故 $\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2$ 也是方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的一个基础解系. ……7 分