绝密 ★ 考试结束前

全国2020年10月高等教育自学考试

线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明：在本卷中，A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & x \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}=a_1x+a_0$，则 $a_0=$

A. -7　　B. -4　　C. 4　　D. 7

2. 设 A 为3阶矩阵，将 A 的第2行与第3行互换得到矩阵 B，再将 B 的第1列的(-2)倍加到第3列得到单位矩阵 E，则 $A=$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\6\\-k\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2k\end{pmatrix}$的秩为2，则数$k=$

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

4．设线性方程组$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$有无穷多个解，则数$a=$

A．-2　　　　B．-1

C．1　　　　D．2

5．设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$

A．$-\frac{3}{2}$　　　　B．$-\frac{2}{3}$

C．$\frac{2}{3}$　　　　D．$\frac{3}{2}$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．行列式$\begin{vmatrix}1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{vmatrix}=$____________.

7．设3阶矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若行列式$|\boldsymbol{B}|=-2$，则行列式$|3\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3-2\boldsymbol{\beta}_1|=$

____________.

8．已知n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.（用矩阵$\boldsymbol{A}$表示.）

9．设$\boldsymbol{A}$为2阶矩阵，若存在矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，

则$\boldsymbol{A}=$

________.

10．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,t)^{\mathrm{T}}$线性无关，则数$t$的取值应满足____________.

11．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\3&2&t\end{pmatrix}$，若3阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则数$t=$____________.

12．设4元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的增广矩阵经初等行变换化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&1&1&1\\0&3&-1&2&1\\0&0&a+1&0&a+1\\0&0&0&c-2&0\end{array}\right)$$

若该方程组有无穷多解且其导出组的基础解系有2个向量，则数a,c的取值应分别满足____________.

13．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$有特征值为3，若矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{B}$必有一个特征值为____________.

14．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&-1\\3&1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$是其一个特征向量，则$\boldsymbol{\alpha}$对应的特征值为____________.

15．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$正定，则数$t$的取值范围为____________.

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}a_1-b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2-b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}$的值.

17．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&5&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&5&-2\\5&1&9\end{pmatrix}$，求

（1）矩阵$\boldsymbol{X}$，使得$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$；（2）$\boldsymbol{AX}^{\mathrm{T}}$.

18．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABA}=6\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$．

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,0,4)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20．确定数 k 的值，使线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-1\\2x_1+kx_2-2x_3=0\\kx_1+2x_2+x_3=k\end{cases}$ 有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $6,3,3$，已知特征值 6 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$．

22．求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形 $f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

四、证明题：本题 7 分。

23．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关.

绝密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数（经管类）试题答案及评分参考

（课程代码　04184）

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。

1．B　　2．D　　3．B　　4．A　　5．C

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．2

7．6

8．$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$

9．$\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

10．$t\neq 6$

11．6

12．$a=-1$，$c=2$

13．4

14．1

15．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．解　$D_n=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2-b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}$　……4分

$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -b\end{vmatrix}=(-b)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)$　……9分

17．解　（1）$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$　……4分

（2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 3 & -1\end{pmatrix}$　……9分

18．解　因$|A|=10\neq 0$，故A可逆，关系式$ABA=6A^2+BA$两边右乘A^{-1}，

得$AB=6A+B$，化为$(A-E)B=6A$，

其中$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$可逆，且$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$　　……5分

故$B=6(A-E)^{-1}A=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$　　……9分

19．解　由$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\end{pmatrix}$　　……2分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$　　……6分

因此向量组的秩为3，一个极大无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$　　……9分

（答案不惟一）

20．解　对方程组的增广矩阵作初等行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\2&k&-2&0\\k&2&1&k\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&k-2&0&2\\0&0&k+1&2(k+1)\end{array}\right)$$　　……4分

因此，当$k+1=0$，即$k=-1$时，该方程组有无穷多解.

此时，同解方程组为$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{3}+x_3\\x_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$. 由此得非齐次线性方程组的特解

$$\eta=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0)^{\mathrm T},$$

导出组的一个基础解系$\xi=(1,0,1)^{\mathrm T}$，

从而，非齐次线性方程组的通解为$\eta+c\xi$，其中c是任意常数.　　……9分

21．解　设特征值3对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $x_1+x_2+x_3=0$，

得到 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. ……4 分

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$ ……9 分

22．解　二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，

由条件知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ ……4 分

当 $\lambda_1=-1$ 时，齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=2$ 时，齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,2)^{\mathrm{T}}$，

单位化得 $\boldsymbol{\eta}_2=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=5$ 时，齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，

单位化得 $\boldsymbol{\eta}_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$. ……7 分

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，

所求正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$. ……9 分

四、证明题：本题 7 分。

23．证　设存在常数 k_1,k_2，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ ①

两边左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

由于 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，上式化为 $k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_1=0$ ……4 分

① 式化为 $k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_2=0$.

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. ……7 分